Pontok, egyenesek, távolságok a Descartes-féle koordináta-rendszerben

Nagy Örs
matematikatanár

Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

Fontosabb összefüggések

Az $A(x_A, y_A)$ és a $B(x_B, y_B)$ pont által meghatározott $[AB]$ szakasz

- **hossza:** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$,
- **felezőpontja:** $F\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$,
- $\frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}$ **arányú osztópontja:** $M\left(\frac{bx_A+ax_B}{a+b}, \frac{by_A+ay_B}{a+b}\right)$.

Adott $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontok által meghatározott egyenes:

$$AB : \quad \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad \vee \quad AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Adott $P(x_P, y_P)$ ponton áthaladó, adott m_e iránytényezőjű egyenes:

$$e : y - y_P = m_e(x - x_P)$$

Az egyenes egyenletének általános (implicit) alakja: $ax + by + c = 0$

Az egyenes egyenletének explicit alakja: $y = mx + n$

Fontosabb összefüggések

Két egyenes kölcsönös helyzete a síkban:

általános alak	$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$	$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$
explicit alak	$d_1 : y = m_1x + n_1$	$d_2 : y = m_2x + n_2$
iránytényező	$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$	$m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$
egybeesőek	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \vee m_1 = m_2, n_1 = n_2$	
párhuzamosak	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \vee m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$	
merőlegesek	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \vee m_1 \cdot m_2 = -1$	

$P(x_P, y_P)$ **távolsága az** $e : ax + by + c = 0$ **egyenestől:** $d(P, e) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Az $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ **által meghatározott** $\triangle$ **területe:**

$$T = \frac{BC \cdot d(A, BC)}{2} \quad \vee \quad T_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|, \ \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

A háromszög nevezetes vonalai és pontjai

A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$ és $C(5,-5)$ pontok. Határozd meg az $ABC_\triangle$

a) **oldalai tartóegyeneseinek egyenletét**

b) **oldalfelezőinek egyenletét és G súlypontjának koordinátáit**

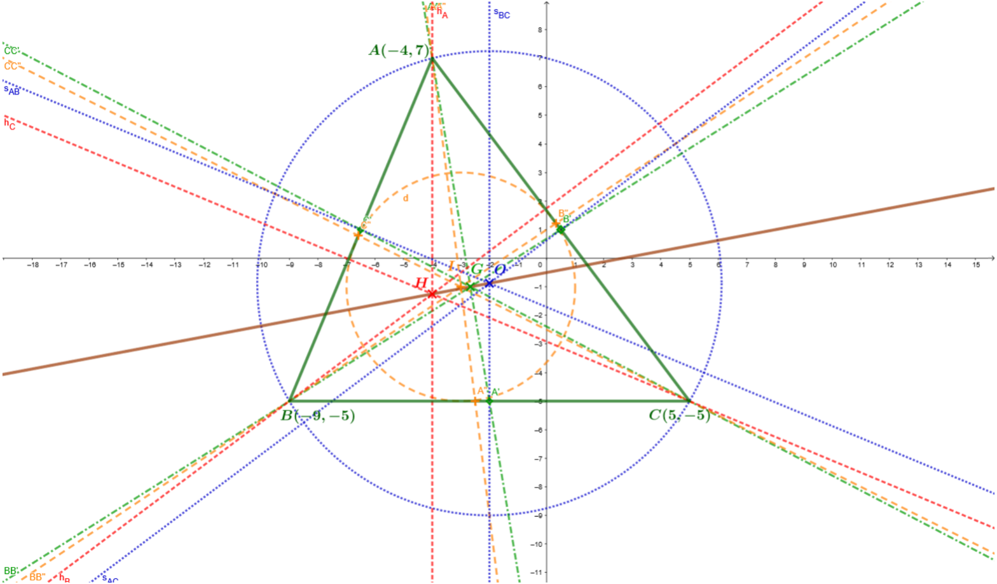
c) **belső szögfelezőinek egyenletét és a beírt kör I középpontjának koordinátáit, valamint a beírt körének r sugarát**

d) **magasságainak egyenletét és H ortocentrumának koordinátáit**

e) **oldalfelező merőlegeseinek egyenletét és a köré írt kör O középpontjának koordinátáit, valamint a köré írt kör R sugarát**

f) **kerületét és területét!**

Igazold, hogy O, G, H kollineáris és G harmadolja az $[OH]$ szakaszt, majd írd fel az Euler-egyenes egyenletét!



A(−4, 7)
B(−9, −5)
C(5, −5)
H
I
G
O
d
A'
A''
B'
B''
C'
C''
h_A
h_B
h_C
s_{AB}
s_{AC}
s_{BC}
CC'
CC''
BB'
BB''

Két pont által meghatározott egyenes egyenlete

a) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $AB, AC, BC =?$

$$AB: \quad \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \quad \vee \quad AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ -9 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff AB: \ 12x - 5y + 83 = 0$$

Hasonlóan $AC: \ 4x + 3y - 5 = 0$, és mivel $y_B = y_C = -5$, ezért $BC: y = -5$.

Megj.: A $P(x_P, y_P)$-n áthaladó függőleges egyenes egyenlete $x = x_P$, míg a vízszintes egyenes egyenlete $y = y_P$.

b) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $AA', BB', CC' = ?$

$$A' \in (BC) : BA' = A'C \Longrightarrow A'\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

Legyen A', B', ill. C' rendre a (BC), (AC), ill. (AB) oldal felezőpontja.

$$A'(-2,-5), \quad B'\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad C'\left(-\frac{13}{2}, 1\right)$$

$$AA' : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow AA' : \; 6x + y + 17 = 0$$

Teljesen hasonlóan

$$BB' : \; 12x - 19y + 13 = 0, \quad CC' : 12x + 23y + 55 = 0$$

Súlypont (G). Szakaszt adott arányban osztó pont

b) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $G=?$
Legyen A', B', ill. C' rendre a (BC), (AC), ill. (AB) oldal felezőpontja.

$$AA' \cap BB' \cap CC' = \{G\},\ G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{8}{3}, -1\right)$$

Súlypont (G). Szakaszt adott arányban osztó pont

b) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $G=?$
Legyen A', B', ill. C' rendre a (BC), (AC), ill. (AB) oldal felezőpontja.

$$AA' \cap BB' \cap CC' = \{G\},\ G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{8}{3}, -1\right)$$

c) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $AA'', BB'', CC'' =?$
Legyen A'', B'', ill. C'' rendre az $\hat{A}$, $\hat{B}$, ill. $\hat{C}$ belső szögfelezőinek talppontja a szemközti oldalon. Ekkor a szögfelezőtétel alapján:

$$A'' \in (BC) : \widehat{BAA''} \equiv \widehat{A''AC} \iff \frac{BA''}{A''C} = \frac{AB}{AC}$$

$$A'' \in (BC) : \frac{BA''}{A''C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Longrightarrow A''\left(\frac{b\cdot x_B + c\cdot x_C}{b+c}, \frac{b\cdot y_B + c\cdot y_C}{b+c}\right)$$

Szögfelezők egyenlete

c) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $AA'', BB'', CC'' =?$
Legyen A'', B'', ill. C'' rendre az $\hat{A}$, $\hat{B}$, ill. $\hat{C}$ belső szögfelezőinek talppontja a szemközti oldalon. Ekkor a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{(-9+4)^2+(-5-7)^2}}{\sqrt{(5+4)^2+(-5-7)^2}} = \frac{13}{15} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{A''} = \frac{15\cdot x_B + 13\cdot x_C}{15+13} = \frac{15\cdot(-9)+13\cdot 5}{28} = -\frac{70}{28} = -\frac{5}{2} \\ y_{A''} = \frac{15\cdot y_B + 13\cdot y_C}{15+13} = \frac{15\cdot(-5)+13\cdot(-5)}{28} = -\frac{5\cdot 28}{28} = -5 \end{array}\right\} \Longrightarrow A''\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$$

Az A és A'' által meghatározott egyenes egyenlete: $AA'' : 8x + y + 25 = 0$.
Ugyanígy $B''\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$ és $BB'' : 2x - 3y + 3 = 0$,
valamint $C''\left(-\frac{191}{29}, \frac{23}{29}\right)$ és $CC'' : x + 2y + 5 = 0$.

A $\triangle$ beírt körének középpontja (I) és sugara (r)

c) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $I=?$, $r=?$

$$AA'' \cap BB'' \cap CC'' = \{I\} \Longrightarrow \begin{cases} 8x+y+25=0 \\ 2x-3y+3=0 \\ x+2y+5=0 \end{cases} \Longrightarrow I(-3,-1).$$

$$r = d(I,AB) = d(I,BC) = d(I,AC)$$

$$P(x_P,y_P) \text{ távolsága az } e: ax+by+c=0 \text{ -től} : d(P,e) = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(I,AB) = \frac{|12\cdot(-3)-5\cdot(-1)+83|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{52}{13} = 4 \Longrightarrow r=4.$$

Magasságok egyenlete: adott pont, adott iránytényező

d) $A(-4, 7)$, $B(-9, -5)$, $C(5, -5)$. $h_A, h_B, h_C = ?$

$$A \in h_A \text{ és } h_A \perp BC \Leftrightarrow m_{h_A} \cdot m_{BC} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5+5}{5+9} = 0 \Leftrightarrow BC \text{ vízszintes } \Rightarrow h_A \text{ függőleges}$$

$$A \in h_A \text{ és } h_A \text{ függőleges} \Longrightarrow h_A : x = x_A \Longleftrightarrow h_A : x = -4.$$

$$B \in h_B \text{ és } h_B \perp AC \Leftrightarrow m_{h_B} \cdot m_{AC} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-7}{5+4} = -\frac{4}{3} \Longrightarrow m_{h_B} = \frac{3}{4}$$

Magasságok egyenlete. Ortocentrum (H)

A $P(x_P, y_P)$ ponton áthaladó, m_e iránytényezőjű e egyenes egyenlete:

$$e : y - y_P = m_e(x - x_P)$$

$$B \in h_B \text{ és } m_{h_B} = \frac{3}{4} \Rightarrow h_B : y - y_B = m_{h_B}(x - x_B) \Leftrightarrow h_B : 3x - 4y + 7 = 0.$$

Teljesen hasonlóan $C \in h_C$ és $m_{h_C} = -\frac{5}{12}$, így $h_C : 5x + 12y + 35 = 0.$

d) $H = ?$

$$h_A \cap h_B \cap h_C = \{H\} \Longrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ 3x - 4y + 7 = 0 \\ 5x + 12y + 35 = 0 \end{cases} \Longrightarrow H\left(-4, -\frac{5}{4}\right).$$

Oldalfelező merőlegesek egyenlete

e) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $s_{BC}, s_{AB}, s_{AC} = ?$

$$A' \in s_{BC} \text{ és } s_{BC} \perp BC \Leftrightarrow m_{s_{BC}} \cdot m_{BC} = -1$$

$$A' \in s_{BC} \text{ és } s_{BC} \parallel h_A \Leftrightarrow m_{s_{BC}} = m_{h_A}$$

$$BC \text{ vízszintes } \implies s_{BC} \text{ függőleges és } A'(-2,-5) \in s_{BC} \implies s_{BC} : x = -2.$$

$$B' \in s_{AC} \text{ és } s_{AC} \perp AC \Leftrightarrow m_{s_{AC}} \cdot m_{AC} = -1$$

$$m_{AC} = -\frac{4}{3} \implies m_{s_{AC}} = \frac{3}{4}, B'\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in s_{BC} \implies s_{BC} : 6x - 8y + 5 = 0.$$

Teljesen hasonlóan

$$m_{s_{AB}} = -\frac{5}{12}, C'\left(-\frac{13}{2}, 1\right) \in s_{AB} \implies s_{AB} : 10x + 24y + 41 = 0.$$

A △ köré írt kör középpontja (O)

e) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $O=?$

$$s_{BC}\cap s_{AC}\cap s_{AB}=\{O\}\Longrightarrow\begin{cases}x=-2\\6x-8y+5=0\\10x+24y+41=0\end{cases}\Longrightarrow O\left(-2,-\frac{7}{8}\right).$$

Megj: $O(x_O,y_O)$ metrikusan is meghatározható, hiszen $OA=OB=OC\ |()^2$

$$(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2=(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2=(x_C-x_O)^2+(y_C-y_O)^2$$

$$(-4-x_O)^2+(7-y_O)^2=(-9-x_O)^2+(-5-y_O)^2=(5-x_O)^2+(-5-y_O)^2$$

$$65+8x_O-14y_O=106+18x_O+10y_O=50-10x_O+10y_O|-(3.)$$

$$15+18x_O-24y_O=56+28x_O=0\Leftrightarrow x_O=-2,y_O=-\frac{7}{8}.$$

A △ köré írt kör sugara (R), kerülete, területe

e) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $R=?$

$$R = OA = OB = OC \Longrightarrow R = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$R = \sqrt{(-4+2)^2 + \left(7 + \frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{63}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{4225}{8^2}} = \frac{65}{8}$$

f) $A(-4,7)$, $B(-9,-5)$, $C(5,-5)$. $K=?, T=?$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

$$BC = 14,\ AC = 15 \Longrightarrow K = AB + BC + AC = 13 + 14 + 15 = 42.$$

$$T = \frac{1}{2}|\Delta|, \Delta = \begin{vmatrix} -4 & 7 & 1 \\ -9 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} \vee T = \frac{BC \cdot d(A, BC)}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84.$$

O, G, H kollineáris. Az Euler-egyenes.

$O\left(-2,-\frac{7}{8}\right), G\left(-\frac{8}{3},-1\right), H\left(-4,-\frac{5}{4}\right)$

$$O,G,H \textbf{ koll.} \iff m_{OG}=m_{GH} \iff O\in GH \iff \begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_G & y_G & 1 \\ x_H & y_H & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\textbf{Euler-egyenes. } GH: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{8}{3} & -1 & 1 \\ -4 & -\frac{5}{4} & 1 \end{vmatrix}=0 \iff GH: 3x-16y-8=0.$$

$$O\in GH \Leftrightarrow 3x_O-16y_O-8=0 \Leftrightarrow -6+14-8=0\ (I) \implies O,G,H \text{ koll.}$$

$$OG=\sqrt{(x_G-x_O)^2+(y_G-y_O)^2}=\frac{\sqrt{257}}{24},\ GH=\frac{\sqrt{257}}{12} \implies OG=\frac{GH}{2}.$$

További feladatok

1. Számítsd ki $a + b$ értékét, ha az $A(1, 2)$ és a $B(-1, 1)$ pont rajta van a $d : x + ay + b = 0$ egyenletű egyenesen!
2. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a $d_1 : ax + y + 2020 = 0$ és $d_2 : x - 2y = 0$ egyenletű egyenesek párhuzamosak legyenek!
3. Határozd meg az $A(3, 2)$ ponton átmenő és a $d : x + 2y + 5 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét!
4. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(1, 1)$ és a $B(-1, 3)$ pont.
   a) Add meg az origón átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes egyenletét!
   b) Határozd meg az O_x-tengely azon C pontját, amelyre $AC \perp AB$.
5. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a $d_1 : mx + (m - 2)y + 2 = 0$ és $d_2 : y = -2x + b$ egyenletű egyenesek párhuzamosak legyenek!
6. Számítsd ki az $A(2, 2)$ pont távolságát a $B(1, 0)$ és $C(0, 1)$ pontok által meghatározott egyenestől!
7. Számítsd ki az $ABC_{\triangle}$ területét, ha $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ és $C(-2, -5)$.