Vektorok a síkban és a Descartes-féle koordináta-rendszerben

Nagy Örs
matematikatanár

Báthory István Elméleti Líceum
Kolozsvár

Vektorok a síkban

Paralelogrammaszabály: az $ABCD$ **paralelogrammában** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
Háromszögszabály: az ABC **háromszögben** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Sokszögszabály: az $A_1A_2\ldots A_n$**-ben** $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$
Ha P **a sík egy tetszőleges pontja, akkor**

- **az** $[AB]$ **szakaszt felező** M **pontra igaz, hogy:**

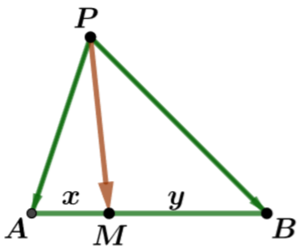
$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$$

- **az** $[AB]$ **szakaszt** $x:y$ **arányban osztó** M**-re:**

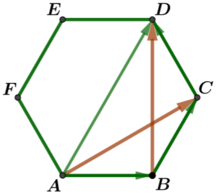
$$\overrightarrow{PM}=\frac{y}{x+y}\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{x}{x+y}\cdot\overrightarrow{PB}$$

- **az** ABC **háromszög** G **súlypontjára igaz, h.:**

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$



1. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalhossza 4 egység. Számítsd ki az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ vektor modulusát!



$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=$$

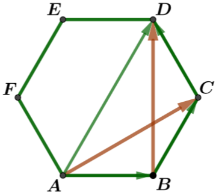
$$=3\overrightarrow{BC}\quad\Longrightarrow\quad|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=3\cdot|\overrightarrow{BC}|=12$$

1. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalhossza 4 egység. Számítsd ki az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ vektor modulusát!

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=$$

$$=3\overrightarrow{BC}\quad\Longrightarrow\quad|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=3\cdot|\overrightarrow{BC}|=12$$

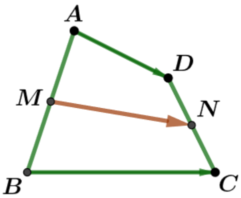


2. Az $ABCD$ négyszög AB, illetve CD oldalának felezőpontja M, ill. N. Igazold, hogy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\end{array}\right|+$$

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN})$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$$



3. Legyen H az ABC háromszög ortocentruma. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$, akkor a háromszög szabályos!

$$G \text{ az } ABC_\triangle \textbf{ súlypontja} \iff \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{HG}$$

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}\implies 3\overrightarrow{GH}=\vec{0}\iff H=G\implies \text{ a } \triangle \text{ szabályos.}$$

3. Legyen H az ABC háromszög ortocentruma. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$, akkor a háromszög szabályos!

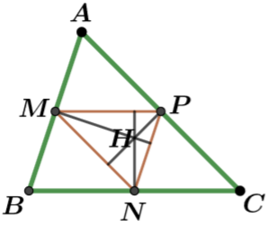
$$G \text{ az } ABC_{\triangle} \textbf{ súlypontja} \iff \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{HG}$$

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0} \implies 3\overrightarrow{GH}=\vec{0} \iff H=G \implies \text{ a } \triangle \text{ szabályos.}$$

4. Tekintsük az ABC háromszöget és az M, N és P pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$ és $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$. Az $MNP_{\triangle}$ ortocentruma legyen H. Igazold, hogy $AH=BH=CH$.

M, N, P az $ABC_{\triangle}$ oldalainak felezőpontjai
$\implies MP \parallel BC$, N a $[BC]$ felezőpontja
$\implies HN$ az $ABC_{\triangle}$-ben a $[BC]$ old.fel.$\perp$-e
$\implies MNP_{\triangle}$ magasságai az $ABC_{\triangle}$ of.$\perp$-ei
$\implies H$ az $ABC_{\triangle}$ köré írt kör középpontja
$\implies AH=BH=CH$.



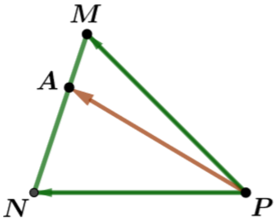
5. Tekintsük az $MNP_\triangle$-et és az A pontot úgy, hogy $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$. Határozd meg azokat az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PM} + b\overrightarrow{PN}$.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{PN} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}\end{aligned}\quad\right| +$$

$$2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} =$$

$$= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PN}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PN} \Longrightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}.$$



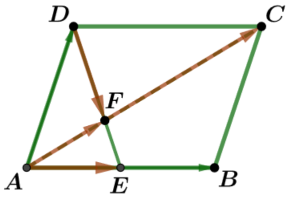
VAGY $\frac{MA}{AN} = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, így

$$\overrightarrow{PA} = \frac{y \cdot \overrightarrow{PM} + x \cdot \overrightarrow{PN}}{x + y}$$

6. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát és az E, F pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ és $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Igazold, h. az A, F és C pontok kollineárisak!

$$A, F, C \textbf{ kollineáris} \iff \exists k \in \mathbb{R}^* : \overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Legyenek $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ bázisvektorok. Ekkor



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow A, F, C \text{ kollineáris.}$$

7. Az ABC háromszögben $AB = 4$, $AC = 5$ és $A = \frac{\pi}{3}$. Számítsd ki:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ **c)** $\cos\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\sphericalangle\right)$ **értékét!**

Két vektor skaláris szorzata:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos((\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle)$

Két vektor szöge:

$\cos((\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Tulajdonságok:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle < \frac{\pi}{2}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle > \frac{\pi}{2}$

Vektorok a síkban: két vektor skaláris szorzata, illetve szöge

7. Az ABC háromszögben $AB = 4$, $AC = 5$ és $A = \frac{\pi}{3}$. Számítsd ki:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ **c)** $\cos\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\sphericalangle\right)$ **értékét!**

Két vektor skaláris szorzata:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos((\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle)$

Két vektor szöge:

$\cos((\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Tulajdonságok:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle < \frac{\pi}{2}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle > \frac{\pi}{2}$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 10.$

b) $$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 =$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\Longrightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{61}.$$

c) $$\cos\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\sphericalangle\right) =$$
$$= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|} \Rightarrow$$
$$\cos\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\sphericalangle\right) = \frac{13}{2\sqrt{61}}.$$

Vektorok a koordináta-rendszerben

Az $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **vektor koordinátái** (x, y), **tehát írhatjuk, hogy** $\vec{u}(x, y)$, **és a vektor modulusa** $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$**.**

Az $\vec{u}(x_1, y_1)$ **és** $\vec{v}(x_2, y_2)$ **vektorokra teljesül, hogy:**

1. **Vektorok egyenlősége:** $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ **és** $y_1 = y_2$
2. **Vektorok összege/különbsége:** $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2)\,\vec{i} + (x_2 \pm y_2)\,\vec{j}$
3. **Vektor szorzása skalárra:** $k \cdot \vec{u} = kx_1\,\vec{i} + ky_1\,\vec{j}, \forall k \in \mathbb{R}$
4. **Két vektor skaláris szorzata:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 \in \mathbb{R}$
5. **Merőlegességi feltétel:** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
6. **Két vektor szöge:** $\cos((\vec{u}, \vec{v})\sphericalangle) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
7. **Párhuzamossági/kollinearitási feltétel:** $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$
8. **Pont helyvektora:** $A(x_A, y_A) \in xOy \Leftrightarrow \vec{r_A} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j}$
9. **Ha** $A(x_A, y_A)$ **és** $B(x_B, y_B)$, **akkor** $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}$ **.**

8. Határozd meg az $m > 0$ értékét úgy, hogy az $\vec{u} = m\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ és $\vec{v} = (m-2)\,\vec{i} - \vec{j}$ vektorok merőlegesek legyenek!

$$\vec{u}(x_1, y_1) \perp \vec{v}(x_2, y_2) \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (m\,\vec{i} + 3\,\vec{j})((m-2)\,\vec{i} - \vec{j}) = m(m-2) - 3 = m^2 - 2m - 3$$

$$m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3) = 0 \iff m = -1 < 0 \ \lor \ m = 3 > 0.$$

8. Határozd meg az $m > 0$ értékét úgy, hogy az $\vec{u} = m\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ és $\vec{v} = (m-2)\,\vec{i} - \vec{j}$ vektorok merőlegesek legyenek!

$$\vec{u}(x_1, y_1) \perp \vec{v}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (m\,\vec{i} + 3\,\vec{j})((m-2)\,\vec{i} - \vec{j}) = m(m-2) - 3 = m^2 - 2m - 3$$

$$m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3) = 0 \Longleftrightarrow m = -1 < 0 \;\vee\; m = 3 > 0.$$

9. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az $\vec{u} = (a-4)\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ és $\vec{v} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ vektorok kollineárisak legyenek!

$$\vec{u}(x_1, y_1) \parallel \vec{v}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Longleftrightarrow \frac{a-4}{3} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow a = \frac{25}{4}.$$

10. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{BA} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$ és $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + 3\,\vec{j}$. Számítsd ki a háromszög területét!

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \implies \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$T_{ABC_\triangle} = \frac{BA \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{\sqrt{50}}}{2} = \frac{7}{2}.$$

Megj.:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$$

$$T_{ABC_\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

11. Tekintsük a G súlypontú ABC háromszöget úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Számítsd ki

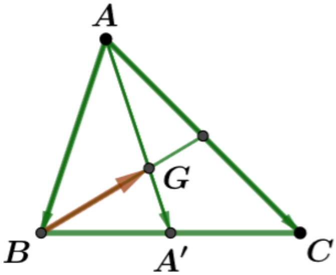
a) az A-ból húzott oldalfelező hosszát b) $\overrightarrow{BG}$ koordinátáit!

a) $$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{i} + 2\vec{j}}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{5}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} \Longrightarrow |\overrightarrow{AA'}| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

b) $$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \Longrightarrow$$

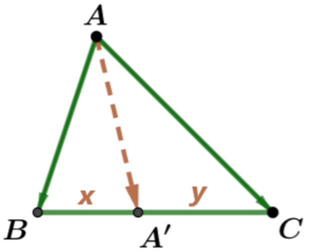
$$\overrightarrow{BG} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + \frac{5}{3}\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j} = -\frac{7}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j}.$$



12. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$. Számítsd ki az A-ból húzott szögfelező hosszát!

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5,$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$



Szögfelezőtétel: $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

Osztópont helyvektora: $\overrightarrow{AA'} = \frac{y\cdot\overrightarrow{AB}+x\cdot\overrightarrow{AC}}{x+y}$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{13\cdot\overrightarrow{AB} + 5\cdot\overrightarrow{AC}}{18} = \frac{13(-4\vec{i} + 3\vec{j}) + 5(5\vec{i} + 12\vec{j})}{18} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{11}{2}\vec{j}$$

$$\Longrightarrow AA' = |AA'| = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

További feladatok

1. Az ABC háromszög AB, BC, AC oldalának felezőpontja M, N, ill. P. Igazold, hogy $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
2. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát és az E pontot úgy, h. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Határozd meg azokat az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre $\overrightarrow{CE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$.
3. Igazold, hogy az $ABCD$ paralelogramma síkjának bármely M pontjára teljesül, hogy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
4. Tekintsük az ABC háromszöget és az M, N és P pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$ és $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{CP}$. Ig., h. M, N és P kollineáris!
5. Igazold, hogy az $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ és $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ tompaszöget zárnak be!
6. Ha $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$ és $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3\sqrt{3}$, számítsd ki az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ szögét!
7. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ és $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Szám. ki az A-ból húzott oldalfelező, szögfelező, illetve magasság hosszát!